

1- حدد المعاملات a, b لكي تصبح الدالة $f(x) = ae^x + be^{-x}$ عمودية على $g(x) = x$ في $\mathcal{L}^2(-1, 1)$ وتحقق $\|f\| = 1$.

2- (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = x + 1$ على الفترة $[1, 1]$.
(ب) هل التقارب منتظم؟ ولماذا؟

3- أثبت أن $e^{-x/2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} L_n(x)$ ، حيث L_n كثيرة حدود لاغير المعرفة بالصيغة

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad 0 \leq x < \infty.$$

إرشاد: أثبت أولاً أن

$$\begin{aligned} \langle e^{-x/2}, L_n \rangle &= \int_0^{\infty} e^{-x/2} L_n(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n! 2^n} \int_0^{\infty} x^n e^{-3x/2} dx, \\ \int_0^{\infty} x^n e^{-3x/2} dx &= n! (2/3)^{n+1}. \end{aligned}$$

4- استخدم التعويض $y(x) = x^{-1/2} u(x)$ لتحويل معادلة يبسل $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ إلى الصيغة $u'' + u = 0$ ، ومن ثم استنتج الحل العام لمعادلة يبسل المعطاة.

5- أثبت أن $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ لكل $x > 0$ ، ومن ثم عيّن أصفار الدالة $J_{-1/2}$ وارسم الشكل البياني لهذه الدالة.

6- (أ) مثل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < p, \\ 0, & |x| > p, \end{cases}$$

بتكامل فورييه بالصيغة المثلثية.

(ب) استنتج من (أ) أن

$$p = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin px \sin \frac{p}{2} x}{1 - x^2} dx.$$