

1- حدد المعاملات a, b لكي تحقق الدالة $f(x) = ax + b$ المعادلتين

$$\langle f(x), x \rangle = 1, \quad \|f(x)\| = 2$$

في $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

2- (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = x$ على الفترة $[10, 10]$.

(ب) هل التقارب منتظم؟ ولماذا؟

3- (أ) أثبت أن كثيرات حدود هرميت $H_n(x)$ متعامدة في الفضاء $\mathcal{L}^2(i, e^{-x^2})$.

(ب) عبر عن x^3 بدلالة كثيرات هرميت.

4- أثبت أن $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ لكل عدد طبيعي n .

5- أثبت أن

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad "n \geq 0.$$

6- (أ) أوجد تحويل فورييه بالصيغة المثلثية للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < p, \\ 0, & |x| > p, \end{cases}$$

ثم عبر عن f بتكامل فورييه.

(ب) استنتج من (أ) أن

$$p = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1-x^2} \sin px dx.$$